

ИЖАНОВА КАМИЛА АЛИБЕКОВНА

**ЕКІ ӨЛШЕМДІ ЖҮКТЕМЕЛІ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕНДЕУІНІҢ
ШЕТТІК ЕСЕПТЕРІ**

**8D05401-Математика білім беру бағдарламасы бойынша философия
докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындаған диссертациясының
АННОТАЦИЯСЫ**

Тақырыптың өзектілігі. Қазіргі математика мен қолданбалы ғылымда жады, тұқым қуалаушылық, фракталдық құрылымдар және ірі көлемдегі әртектілікті қамтитын үдерістерді сипаттайтын модельдерге қызығушылық артып келеді. Мұндай құбылыстарды көбінесе классикалық бүтін санды дифференциалдық теңдеулерді қолдана отырып, жеткілікті түрде сипаттау мүмкін емес. Сондықтан соңғы онжылдықтарда бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер ерекше танымалдылыққа ие болды, өйткені олар күрделі жүйелерді, әсіресе сызықтық еместік, кідіріс және стационарлық еместік жағдайларында модельдеуге мүмкіндік беретін икемді құрал болып табылады.

Сондай-ақ бейлокал физикалық және биологиялық фракталдық үдерістердің математикалық модельдері бөлшек ретті жеке туындылары бар жүктелген дифференциалдық теңдеулерге негізделеді. А.М. Нахушевтің монографиясында жүктелген теңдеулерге арналған кең ауқымды библиографиялық шолу берілген, онда жүктелген теңдеулердің математикалық биология, математикалық физика, локалсыздық үдерістер мен құбылыстарды математикалық модельдеу, сондай-ақ жадысы бар тұтас орта механикасы есептерін зерттеу әдісі ретіндегі әртүрлі қолданбалар қамтылған. Бөлшек диффузиялық-толқындық теңдеулер ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады. Өз еңбегінде Е. Шитикова қатты дененің динамикалық механикасы есептерінде қолданылатын сызықтық тұтқырсерпімділік модельдеріне бөлшек есептеуді қолдану бойынша соңғы зерттеулерге шолу жасады.

Бұл теңдеулерді шешу үшін әртүрлі әдістер қолданылады: Грин функциялары әдісі, соңғы синус түрлендіру әдісі, айнмалыларды бөлу әдісі, соңғы айырмалар әдісі, Адомианның жіктеу әдісі (ADM) және соңғы айырмалар схемасы. Жақында Kasemi мен Rostam бөлшек уақытты диффузиялық-толқындық теңдеу үшін жаңа локалдық үзік Галеркин әдісін ұсынды. Теңдеу интерполяцияланған коэффициенттері бар 1-ші дәрежелі үзік соңғы элементті анықтау арқылы шешілді.

Математикалық тұрғыдан алғанда, жүктемелі мүше бөлшек туынды немесе бөлшек интеграл түрінде қарастырылғанда бөлшек жүктемесі бар жылуөткізгіштік теңдеуі үшін шеттік есептерді зерттеу ерекше қызығушылық тудырады. Жүктемелі дифференциалдық операторлар үшін шеттік есептерді $Lu + \gamma Mu = f$ түріндегі функционалдық-дифференциалдық оператор ретінде түсіндіруге болады, мұнда L – дифференциалдық бөлік, ал M – жүктемелі бөлік. Теңдеудегі жүктемелі мүше ауытқу ретінде қарастырылады. Сонымен қатар, ол ізделінетін u шешімінен алынатын кейбір операциялардың ізін қамтиды.

Егер жүктемелі мүше ізделінетін функцияның бөлшек туындысының ізін қамтыса, онда локалсыздық орын алады, яғни жүйенің ағымдағы күйі оның алдыңғы күйіне (тарихына) тәуелді болады, алайда бұл тәуелділік функцияның өткен мәндері бойынша алынатын интеграл арқылы өрнектеледі. Кейбір еңбектерде белгілі бір функционалдық кластарда бөлшек жүктемесі бар шеттік есептердің шешімдерінің бар болуы мен бірегейлігі жүктемелі мүшедегі бөлшек туындының реттілігіне тәуелді екені көрсетілген. Сондай-ақ кеңістіктік айнымалы бойынша жүктемесі бар шеттік есептер үшін бөлшек туындының кейбір мәндерінде спектралдық жағдайдың жүзеге асатыны, атап айтқанда алынған Вольтеррдің типті интегралдық теңдеудің өзінің функциясы болатыны көрсетілген. Осындай Вольтерр интегралдық теңдеулері шығындалған салаларында шеттік есептерді зерттеу барысында да туындайды.

Жұмыстың мақсаты. Жүктемелі теңдеулер үшін шеттік есептердің қойылуы және шешімі – бұл бөлшек интеграл-дифференциалдық операторларды қамтитын жүктемелі теңдеулер үшін шеттік есептердің қойылуы және шешілуі; олардың шешімдерінің бар болуы мен бірегейлігінің шарттарын анықтау.

Зерттеудің міндеттері:

1. Жүктемелі теңдеулер және/немесе бөлшек ретті теңдеулер үшін шеттік есептерді (барлығы жеті) әртүрлі бөлшек операторларды (Риман-Лиувилль, Капуто), кеңістіктік өлшемдерді және облыстардың геометриясын (соның ішінде цилиндр емес салалар) ескере отырып құрастыру.

2. Есептерді интегралдық немесе интеграл-дифференциалдық теңдеулерге келтіру және кейбір алынған интегралдық немесе дифференциалдық теңдеулердің нақты шешімдерін арнайы бөлшек есептеу функцияларын қолданып, жабық түрде ұсыну.

3. Арнайы функциялардың асимптотикалық қасиеттерінің негізінде басқа да қойылған есептер үшін пайда болатын интегралдық теңдеулердің ядросына бағалау жасау.

4. Есептерді сапалық тұрғыдан талдау, жүктемелі мүшелерді шешімнің бірегейлігіне әсеріне қарай әлсіз немесе күшті ауытқулар ретінде жіктеу; есептің бірегей шешімі болмайтын критикалық «спектралдық жағдайын» анықтау және сәйкес біртекті есептің меншікті функциясын табу.

5. Шеттік есептердің шешімдерінің бар болуы мен бірегейлігіне қатысты теоремаларды қалыптастыру және дәлелдеу, бастапқы деректер мен жүктемелі мүше параметрлерінің белгілі шарттарында.

Зерттеудің жалпы әдістері. Жұмыста дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясы, функционалдық талдау және бөлшек есептеулер, интегралдық түрлендіру әдістерін және сингулярлық интегралдық теңдеулер теориясының негіздері пайдаланылған.

Ғылыми жаңалық.

Осыдан бұрын зерттеулер теңдеудің жүктелген мүшесі теңдеудің ретінен төмен ретті бөлшек туынды бөлшек жүктелген бір өлшемді жылуөткізгіштік мәні жағдайында зерттеулер жүргізілген. Енді бөлшек дербес дифференциалдық теңдеулер үшін шекаралық мән есептерінің жаңа түрлері қойылып, зерттелуде, онда жүктелген мүшелерге бөлшек интеграл, уақыт және кеңістік айнымалыларына қатысты бөлшек туындылар және қуат коэффициенті бар көбейтінділер кіреді. Жүктелген нүктелер қисық бойымен (бір өлшемді жағдайда) және бет бойымен (екі өлшемді және көп өлшемді жағдайларда) қозғалады. Жүктелген мүше шешімнің бірегейлігін сақтайтын әлсіз ауытқу ретінде әрекет ете алатыны (бөлшек интегралдарға немесе төменгі ретті туындыларға тән); немесе біртекті есептің бірегей еместігіне және тривиалды емес шешімдерінің болуына әкелетін күшті ауытқу ретінде әрекет ете алатыны анықталды (жоғары ретті бөлшек туындыларға тән). Сонымен қатар, жүктелген мүшедегі қуат коэффициенті бар есептер үшін «спектрлік жағдай» ашылды. Теңдеудегі туындылардың реттерінің айырмашылығы мен жүктелген мүшеге ($\mu = \beta - \alpha$) тең μ дәрежесі үшін біртекті есеп спектрге және шексіз тривиалды емес шешімдер жиынтығына ие болатыны дәлелденді.

Зерттеудің теориялық және тәжірибелік маңыздылығы.

Бұл жұмыс теориялық сипатта. Ол екі түрлі сипаттамасы бар теңдеулер класын қарастыру арқылы дербес туындылар теңдеулері (ДТТ) үшін шекаралық есептердің заманауи теориясына үлес қосады: теңдеудің негізгі бөлігіндегі және/немесе есеп теңдеуінің жүктелген мүшесіндегі бөлшек оператор. Ол классикалық ДТТ теориясынан тыс шығып, локалсыз есептерді қарастырады, мұндағы теңдеудің бір нүктедегі әрекеті шешімнің бүкіл сала бойынша немесе белгілі бір уақыт нүктелерінде/сәттерінде әрекетіне байланысты. Сондықтан, бұл жұмыстың теориялық құндылығы локалсыз есептер теориясын дамытуда жатыр. Негізгі теориялық жаңалық болып

жүктелген мүшенің түрі (мысалы, бөлшек туынды немесе бөлшек интеграл) мен шешімнің бірегейлігінің негізгі қасиеті арасындағы тікелей байланысты орнату табылады. Бұл мұндай есептерді жіктеу және олардың дұрыс қойылуын зерттеу үшін негізгі критерий болып табылады.

Нәтижелер әртүрлі салалар үшін өзекті, соның ішінде бөлшек тұтқырлық, жады бар ортаның термодинамикасы, локалсыз өзара әрекеттесулері бар популяция динамикасы және тұқым қуалаушылық әсерлері бар қаржылық математика.

Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер:

1. Негізгі бөлігінде бөлшек операторы және/немесе бөлшек туындысы немесе интеграл түрінде жүктелген мүшесі бар дифференциалдық теңдеулер үшін шекаралық есептерді классикалық дербес дифференциалдық теңдеулердің қасиеттеріне дейін төмендетілмейтін локалсыз есептердің жеке класы ретінде тұжырымдау.

2. Көрсетілген шекаралық есептерді интегралдық немесе дифференциалдық теңдеулерге келтіру және оларды зерттеу.

3. Интегралдық теңдеулердің шешімдерін айқын түрде құру және/немесе арнайы функциялардың асимптотикалық іс-әрекетіне негізделген олардың ядроларын бағалау.

4. Көрсетілген шекаралық есептердің жүктелген мүшесінің нақты түріне байланысты шешілуі.

5. Жүктелген мүшесінде қуат коэффициенті бар есеп үшін өзінің функциясын табу.

Жүргізілген зерттеулердің дұрыстығы мен негізділігі.

Қолданылған әдістердің конструктивтілігі зерттеудің сенімділігі мен негізділігін қамтамасыз етеді. Жалпы қорытындылар теоремалар түрінде тұжырымдалған және олардың дәлелдері келтірілген.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 13 мақала жарияланды, оның 4-і Scopus тізіміндегі журналдарда, ал 9-ы халықаралық ғылыми конференциялардың жұмыстар жинағында жарияланды.

Жұмысты апробациялау.

Диссертациясының нәтижелері бойынша халықаралық және алыс шетел конференцияларда баяндамалар жасалды:

1. Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (Turkestan, September 20-23, 2023).

2. The VII International Scientific Conference "Nonlocal Boundary Value Problems and Related Problems of Mathematical Biology, Informatics and Physics" (B&NAK-2023). (Nalchik, December 4-8 2023).

3. Evolution Equations, Approximation and Spectral Optimization: book of abstracts of International Summer School & Conference (Almaty, September 11-14, 2024).

4. Actual problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2024: abstracts of the IX international scientific conference, dedicated to the 630th anniversary of the birth of Mirzo Ulugbek (Tashkent, October 22-23, 2024).

5. Annual International April Mathematical Conference (Almaty, April 1-4, 2025).

6. Artificial Intelligence and Inverse Problems in Science, Technology and Industry: Proceedings (Astana, April 14-16 2025).

7. 15-th ISAAC Congress: Abstract book (Astana, July 21-25, 2025).

8. The 10th International Conference on Differential and Functional Differential Equations dedicated to the memory of academician S.P. Novikov: Abstracts (Moscow, August 17-24, 2025).

9. Академик Е.А.Бөкетовтің 100 жылдығына орай ұйымдастырылған «Пәнаралық ғылыми зерттеулердің өзекті мәселелері» халықаралық ғылыми конференциясы (Қарағанды, 17-20 маусым, 2025).

Докторанттың әрбір жарияланымды дайындауға қосқан үлесі.

Ғылыми жетекшілермен және бірлескен авторлармен бірлесіп орындалған 13 мақалада ғылыми жетекшілер мәселені тұжырымдады, ал докторант негізгі және қосымша нәтижелерді өз бетінше тұжырымдап, дәлелдерін ұсынды.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. 74 беттік диссертация келесі құрылымдық элементтерден тұрады: жазба, кіріспе, екі бөлім, қорытынды және пайдаланылған әдебиеттер тізімі.

Пайдаланылған дереккөздер саны– 64.

Кілт сөздер. Жүктелген теңдеу, жылуөткізгіштік теңдеуі, диффузия теңдеуі, екі өлшемді жүктелген жылу теңдеуі.